切り換えシステムの $\mathcal{L}_2$ ゲイン解析

○ 平田 研二[†]　João P. Hespanha[‡]

$\mathcal{L}_2$-induced Gain Analysis for Switched Systems

∗ Kenji Hirata[†] and João P. Hespanha[‡]

Abstract: This paper addresses the computation of the $\mathcal{L}_2$-induced gain for switched linear systems. The main contribution of the paper is to completely characterize the induced gain of the switched system through a system of differential inequalities on a *common* storage function, one equation for each system being switched. The motivation for computing the induced gain of a switched system is the application of robust stability tools to the analysis of hybrid systems.

1. はじめに

連続・離散の動特性が混在するハイブリッドシステムは, その記述能力の高さから, 近年大きな注目を集めている. 切り換えシステムは, ハイブリッドシステムを表現する代表的な数理モデルの一つとなっている.

切り換えシステムの安定性に関しては, 多くの研究成果が報告されている. 主要な結果は, 例えば文献 [1], [2] などで確認することができる. これらの中で, とくに本稿での議論と関連が深いものとして, 文献 [3], [4] を挙げることができる. ここでは, 切り換えシステムの安定性が, 切り換えシステムを構成する個々の時不変システム全てに対する共通 Lyapunov 関数の存在と等価であることが示されている.

一方ここで, システム制御理論を展開する上での重要なツールの一つとして, システムの入出力ゲインを挙げることができる. とくに $\mathcal{L}_2$ ゲイン ($\mathcal{L}_2$ 誘導ノルム) は, ロバスト安定性などの議論において, 不可欠な道具立てとなっている.

切り換えシステムの $\mathcal{L}_2$ ゲイン解析に関する研究は, その重要性にもかかわらず, 限定的なものに留まっている. 切り換えシステムに対し, 保守性のない $\mathcal{L}_2$ ゲイン解析条件を与えるものとして, 文献 [5] が挙げられる. ここでは, 切り換え信号の隣りあう切り換え点の間隔が極限にまで長くなった, slow-switching と呼ばれる場合について, $\mathcal{L}_2$ ゲインの完全な特徴づけを与えている. また, 1 次の切り換えシステムに対する $\mathcal{L}_2$ ゲインは, 文献 [6] での結果により, 保守性なく特徴づけることができる.

本稿では, 切り換えシステムの $\mathcal{L}_2$ ゲインを, 保守性なく特徴づける完全な解を与える. このために, 切り換えシステムが与えられた正数以下の $\mathcal{L}_2$ ゲインをもつことと, 切り換えシステムを構成する個々の時不変システム全てに対する共通蓄積関数の存在が, 等価であることを示す. さらに, ゲイン解析のみではなく, 切り換えシステムが安定かつ与えられた正数以下の $\mathcal{L}_2$ ゲインをもつための条件についても, 保守性のない必要かつ十分な条件を与える.

2. 切り換えシステムの安定性および $\mathcal{L}_2$ ゲイン

ここでは, 切り換えシステムに対する $\mathcal{L}_2$ ゲインの解析問題を定式化する.

2.1 切り換えシステム

つぎの切り換えシステムを考える.

$$\dot{x} = A_s x + B_s u \qquad y = C_s x + D_s u \tag{1a}$$

ここで $s\colon [\,0,\infty\,) \to \mathcal{P}$ は, 区分的に定数値をとる切り換え信号である. 切り換え信号 s は, インデックス集合 $\mathcal{P}$ で規定された, n 次元, m 入力, k 出力の状態空間実現の集合

$$\{(A_p, B_p, C_p, D_p) |\, p \in \mathcal{P}\} \tag{1b}$$

から, 各時刻における動特性 (A_p, B_p, C_p, D_p) を選択する. なおここで, 集合 $\mathcal{P}$ はコンパクトとする.

本稿では, 区分的に定数値をとる切り換え信号の全体を $\mathcal{S} = \{s\colon [\,0,\infty\,) \to \mathcal{P}\}$ であらわす. ただしここで, 区分的に定数値をとる切り換え信号とは, 任意の有限な時間区間において高々有限個の切り換え点のみをもち, かつ隣りあう切り換え点の間では定数値をとるものをいう. また, すべての切り換え信号は, 右連続とする[1].

関数 $x\colon [\,0,\infty\,) \to \mathbb{R}^n$ が, 連続かつ区分的に微分可能であり, ある切り換え信号 $s \in \mathcal{S}$ および入力 $u \in \mathcal{L}_2^m$ が存在して, 時変係数の微分方程式 $\dot{x}(t) = A_{s(t)}x(t) + B_{s(t)}u(t)$ が, ほとんどすべての $t \geq 0$ に対して成立しているならば, x は (1) の解であるという. なおここで $\mathcal{L}_2^m$ は, $[\,0,\infty\,)$ で定義され $\mathbb{R}^m$ に値をとる二乗可積分関数の全体とする.

[†]長岡技術科学大学 機械系, 940 2188 長岡市 上富岡町 1603-1. Department of Mechanical Engineering, Nagaoka University of Technology, Nagaoka 940 2188, Japan.

[‡]Center for Control, Dynamical Systems, and Computation, and Department of Electrical and Computer Engineering, University of California, Santa Barbara, CA 93106 USA.

[1]すべての $t \geq 0$ に対して, $s(t) = \lim_{\tau \downarrow t} s(\tau)$.

2.2 安定性および $\mathcal{L}_2$ ゲイン

ここでは, 切り換えシステムの $\mathcal{L}_2$ ゲインおよび必要となる安定性の定義をまとめる[2].

定義 1. $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ とする. クラス $\mathcal{KL}$ に属する関数 β が存在し, すべての $t \geq 0$, $s \in \mathcal{S}'$ および $x(0) \in \mathbb{R}^n$ に対して, $\|x(t)\| \leq \beta(\|x(0)\|, t)$ とできるならば, (1) は $\mathcal{S}'$ 上で一様漸近安定という. ただしここで $x(t)$ は, 切り換え信号 s, 入力 $u \equiv 0$ および初期状態 $x(0)$ に対する (1) の解をあらわす. □

定義 2. $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ とする. 定数 $a > 0$ および $\lambda > 0$ が存在し, 定義 1 において, すべての $r \geq 0$ および $t \geq 0$ に対して, $\beta(r, t) = ae^{-\lambda t}r$ とできるならば, (1) は $\mathcal{S}'$ 上で (一様) 指数安定という. □

切り換えシステムの $\mathcal{L}_2$ ゲインとして, つぎの 2 つの定義を与える.

定義 3. $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ および $\gamma > 0$ とする. すべての $t \geq 0$, $s \in \mathcal{S}'$ および $u \in \mathcal{L}_2^m$ に対して,

$$\int_0^t \|y(\tau)\|^2 d\tau \leq \gamma^2 \int_0^t \|u(\tau)\|^2 d\tau \tag{2}$$

であるならば, (1) は γ 以下の $\mathcal{L}_2$ ゲインを $\mathcal{S}'$ 上で一様にもつという. ただしここで $y(t)$ は, 切り換え信号 s, 入力 u および初期状態 $x(0) = 0$ に対する (1) の出力をあらわす. □

定義 4. $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ および $\gamma > 0$ とする. ある $\gamma' < \gamma$ に対して, (1) が γ' 以下の $\mathcal{L}_2$ ゲインを $\mathcal{S}'$ 上で一様にもつならば, (1) は γ 未満の $\mathcal{L}_2$ ゲインを $\mathcal{S}'$ 上で一様にもつという. □

本稿の主題は, 切り換えシステムの $\mathcal{L}_2$ ゲインを, 保守性なく完全に特徴づけることにある (3.1 節). また, 有界な $\mathcal{L}_2$ ゲインをもつ切り換えシステムとその安定性の関係を明らかにする (3.2 節).

3. 切り換えシステムの $\mathcal{L}_2$ ゲイン解析

ここでは, 本稿の主要な結果をまとめる. なお紙面の都合により, すべての証明は別紙 [7] に示す.

3.1 $\mathcal{L}_2$ ゲイン解析

つぎの 定理 1 は, 切り換えシステムが γ 以下の $\mathcal{L}_2$ ゲインをもつための, 必要かつ十分な特徴づけを与える[3].

[2]連続関数 $\alpha\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ が, $\alpha(0) = 0$ かつ厳密に増加するならば, クラス $\mathcal{K}$ に属するという. 連続関数 $\beta\colon [0, \infty) \times [0, \infty) \to [0, \infty)$ において, $t \geq 0$ を固定した $\beta(\cdot, t)$ がクラス $\mathcal{K}$ に属し, $r \geq 0$ を固定したとき非増加かつ $\lim_{t\to\infty} \beta(r, t) = 0$ ならば, クラス $\mathcal{KL}$ に属するという.

[3]関数 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が, すべての $x \in \mathbb{R}^n$ および $k \in \mathbb{R}$ に対して, $f(kx) = k^q f(x)$ であるならば, q 次の同次関数という.

定理 1. $\gamma > 0$ とする. また, (1) は $\mathcal{S}$ 上で一様漸近安定とする. つぎの 4 つの条件は等価である.

1. (1) は γ 以下の $\mathcal{L}_2$ ゲインを $\mathcal{S}$ 上で一様にもつ.
2. すべての $p \in \mathcal{P}$ に対して $\gamma^2 I - D_p^{\mathrm{T}} D_p > 0$ である. また, すべての $p \in \mathcal{P}$ およびほとんどすべての x に対して,

$$\begin{aligned}&\frac{\partial V}{\partial x}(x) A_p x + x^{\mathrm{T}} C_p^{\mathrm{T}} C_p x \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} B_p^{\mathrm{T}} \frac{\partial V^{\mathrm{T}}}{\partial x}(x) + D_p^{\mathrm{T}} C_p x\right)^{\mathrm{T}} \left(\gamma^2 I - D_p^{\mathrm{T}} D_p\right)^{-1} \\ &\quad \times \left(\frac{1}{2} B_p^{\mathrm{T}} \frac{\partial V^{\mathrm{T}}}{\partial x}(x) + D_p^{\mathrm{T}} C_p x\right) \leq 0 \end{aligned} \tag{3}$$

   をみたす局所 Lipschitz かつ $V(0) = 0$ である 2 次の同次関数 $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が存在する.
3. すべての $p \in \mathcal{P}$ に対して $\gamma^2 I - D_p^{\mathrm{T}} D_p > 0$ である. また, すべての $p \in \mathcal{P}$ およびほとんどすべての x に対して, (3) をみたす凸かつ $V(0) = 0$ である 2 次の同次関数 $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が存在する.
4. すべての $p \in \mathcal{P}$ に対して $\gamma^2 I - D_p^{\mathrm{T}} D_p > 0$ である. また, 半正定値行列からなるコンパクト集合 $K \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ が存在し, すべての $p \in \mathcal{P}$ およびほとんどすべての x に対して, 区分的二次関数 $V(x) = \max_{Q\in K} x^{\mathrm{T}} Q x$ が (3) をみたす. □

注意 1. 定理 1 の各条件 2., 3. および 4. は, すべての $p \in \mathcal{P}$ に対して, 不等式 (3) をみたす単一の関数 V の存在を要求している. すなわちこれは, 共通蓄積関数 V の存在が, 切り換えシステムの $\mathcal{L}_2$ ゲインを保守性なく特徴づけることを明らかにしている. □

つぎの 定理 2 は, (3) の右辺が厳密に負の値に制約されることが, 切り換えシステムが γ 未満の $\mathcal{L}_2$ ゲインをもつための必要かつ十分な条件を与えることを明らかにしている. なお 定理 2 は, 安定かつ γ 未満の $\mathcal{L}_2$ ゲインをもつ切り換えシステムの特徴づけにおいて, 重要となる (系 2 参照).

定理 2. $\gamma > 0$ とする. また, (1) は $\mathcal{S}$ 上で一様漸近安定とする. つぎの 4 つの条件は等価である.

1. (1) は γ 未満の $\mathcal{L}_2$ ゲインを $\mathcal{S}$ 上で一様にもつ.
2. すべての $p \in \mathcal{P}$ に対して $\gamma^2 I - D_p^{\mathrm{T}} D_p > 0$ である. また, 定数 $\epsilon > 0$ が存在し, すべての $p \in \mathcal{P}$ お

よびほとんどすべての x に対して,

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)A_p x + x^{\mathrm{T}} C_p^{\mathrm{T}} C_p x + \left(\frac{1}{2}B_p^{\mathrm{T}}\frac{\partial V^{\mathrm{T}}}{\partial x}(x) + D_p^{\mathrm{T}} C_p x\right)^{\mathrm{T}} \left(\gamma^2 I - D_p^{\mathrm{T}} D_p\right)^{-1} \times \left(\frac{1}{2}B_p^{\mathrm{T}}\frac{\partial V^{\mathrm{T}}}{\partial x}(x) + D_p^{\mathrm{T}} C_p x\right) \leq -\epsilon\|x\|^2 \qquad (4)$$

をみたす局所 Lipschitz かつ $V(0) = 0$ である 2 次の同次関数 $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が存在する.

3. すべての $p \in \mathcal{P}$ に対して $\gamma^2 I - D_p^{\mathrm{T}} D_p > 0$ である. また, 定数 $\epsilon > 0$ が存在し, すべての $p \in \mathcal{P}$ およびほとんどすべての x に対して, (4) をみたす凸かつ $V(0) = 0$ である 2 次の同次関数 $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が存在する.

4. すべての $p \in \mathcal{P}$ に対して $\gamma^2 I - D_p^{\mathrm{T}} D_p > 0$ である. また, 定数 $\epsilon > 0$ および半正定値行列からなるコンパクト集合 $K \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ が存在し, すべての $p \in \mathcal{P}$ およびほとんどすべての x に対して, 区分的二次関数 $V(x) = \max_{Q\in K} x^{\mathrm{T}} Q x$ が (4) をみたす. □

注意 2. 不等式 (4) より, すべての $p \in \mathcal{P}$ およびほとんどすべての x に対して, $(\partial V/\partial x)(x)A_p x \leq -\epsilon\|x\|^2$ がえられる. したがって, その正定性が保証されるならば, 関数 V は, 切り換えシステムの共通 Lyapunov 関数となる. □

3.2 有界ゲインと安定性

定理 1 および 2 では, (1) の安定性が仮定されている. 不等式 (3) あるいは (4) は, 一般には, (1) の安定性を導かない. このため, 定理 1, 2 における安定性は, 必要な仮定である.

ここで可観測性に類する仮定の導入により, 不等式 (3) あるいは (4) から, 安定性を導くことが期待される. しかしながら切り換えシステムにおいては, 単純にすべての (C_p, A_p) が可観測対であるとしても, この仮定のみからは, 安定性が導かれない. これは例えば, LaSalle の不変原理を切り換えシステムに対して拡張する試み [8] などにおいても, 議論されている.

つぎの 系 1 は, 可観測性, 不等式 (3) に加え, 切り換え信号の正則性に関する性質が, 重要な役割を果たすことを明らかにしている. 系 1 を述べるため, 切り換え信号の集合 $\mathcal{S}_{\text{p-dwell}}[\,\tau_D, T\,]$, $\tau_D > 0$, $T \in [\,0, \infty\,]$ を導入する. 与えられた τ_D および T に対して, つぎの性質をみたす切り換え信号の全体を $\mathcal{S}_{\text{p-dwell}}[\,\tau_D, T\,]$ であらわす. すなわち, 切り換え信号 s に対して, 系列 $0 = \tau_0 < t_0 \leq \tau_1 < t_1 \leq \tau_2 < t_2 \leq \cdots$ がとれ, つぎの性質をみたすとする. τ_D (persistent dwell-time) に対して $t_k - \tau_k \geq \tau_D$ であり, この区間で切り換え信号は定数値をとる. また, この性質をみたす区間の間隔は, T (period of persistence) 以下, すなわち $\tau_{k+1} - t_k \leq T$ となっている.

系 1. $\gamma > 0$ とする. また, すべての $p \in \mathcal{P}$ に対して (C_p, A_p) は可観測対とする. つぎの条件 1. が成立するならば, 条件 2 が成立する.

1. すべての $p \in \mathcal{P}$ に対して $\gamma^2 I - D_p^{\mathrm{T}} D_p > 0$ である. また, すべての $p \in \mathcal{P}$ およびほとんどすべての x に対して, (3) をみたす局所 Lipschitz かつ $V(0) = 0$ である 2 次の同次関数 $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が存在する.

2. すべての $\tau_D > 0$ および $T < \infty$ に対して, (1) は $\mathcal{S}_{\text{p-dwell}}[\,\tau_D, T\,]$ 上で (一様) 指数安定であり, かつ γ 以下の $\mathcal{L}_2$ ゲインを $\mathcal{S}_{\text{p-dwell}}[\,\tau_D, T\,]$ 上で一様にもつ. □

注意 3. 系 1 は, 有界ゲインを保証する不等式 (3) および各モードの可観測性に関する仮定から安定性を帰着するには, 許容される切り換え信号が, 切り換え信号の全体 $\mathcal{S}$ から, その部分集合に制限されなければならないことを示している.

つぎの 系 2 は, 可観測性に関する仮定, 不等式 (4) に加え, 厳密に凸な蓄積関数の存在が, 安定性および有界 $\mathcal{L}_2$ ゲインを同時に, かつ保守性なく特徴づけることを示している.

系 2. $\gamma > 0$ とする. また, (C_q, A_q) が可観測対となる $q \in \mathcal{P}$ が, 少なくとも 1 つ, 存在するとする. つぎの 3 つの条件は等価である.

1. (1) は $\mathcal{S}$ 上で (一様) 指数安定であり, かつ γ 未満の $\mathcal{L}_2$ ゲインを $\mathcal{S}$ 上で一様にもつ.

2. すべての $p \in \mathcal{P}$ に対して $\gamma^2 I - D_p^{\mathrm{T}} D_p > 0$ である. また, 定数 $\epsilon > 0$ が存在し, すべての $p \in \mathcal{P}$ およびほとんどすべての x に対して, (4) をみたす厳密に凸かつ $V(0) = 0$ である 2 次の同次関数 $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が存在する.

3. すべての $p \in \mathcal{P}$ に対して $\gamma^2 I - D_p^{\mathrm{T}} D_p > 0$ である. また, 定数 $\epsilon > 0$ および正定行列からなるコンパクト集合 $K \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ が存在し, すべての $p \in \mathcal{P}$ およびほとんどすべての x に対して, 区分的二次関数 $V(x) = \max_{Q\in K} x^{\mathrm{T}} Q x$ が (4) をみたす. □

注意 4. 厳密に凸かつ $V(0)=0$ である 2 次の同次関数は, 正定関数となる[4]. 系 2 では, これと不等式 (4) より, 切り換えシステムの指数安定性を示している (注意 2 参照).

3.3 考 察

ここでは, 本稿でえられた結果の一つに, 簡単な例題をとおしての解釈を与えることを試みる. 2 つのモード $\mathcal{P}=\{1,2\}$ をもつ切り換えシステム

$$(A_1,B_1,C_1,D_1)=(-1,1,1,0)$$
$$(A_2,B_2,C_2,D_2)=(-1,1/10,10,0)$$

を考える. それぞれのモードに固定された時不変システムは,

$$\left\|\left(\begin{array}{c|c}A_1 & B_1\\ \hline C_1 & D_1\end{array}\right)\right\|_\infty=\left\|\left(\begin{array}{c|c}A_2 & B_2\\ \hline C_2 & D_2\end{array}\right)\right\|_\infty=\|\frac{1}{s+1}\|_\infty=1$$

の $\mathcal{H}^\infty$ ノルムをもつ.

この切り換えシステムを

$$s(t)=\begin{cases}1 & t<T\\ 2 & t\geq T\end{cases}\quad u(t)=\begin{cases}t/T & t<T\\ 0 & t\geq T\end{cases}\quad T=2.2$$

の切り換え信号 s および入力 u で駆動した場合の出力を Fig. 1 に示す. Fig. 1 の破線 は, モードを $p=1$ あるいは 2 に固定した時不変システムの出力である. 一方, 切り換え時の出力は Fig. 1 の実線となっている. この応答における入出力信号それぞれの $\mathcal{L}_2$ ノルムの計算により, 切り換えシステムの $\mathcal{L}_2$ ゲインは, $\gamma\geq 4.95$ となる. 切り換えの影響により, 切り換えシステムの $\mathcal{L}_2$ ゲインは, 個々のモードに固定した場合の $\mathcal{H}^\infty$ のノルムに比較し, 極端に大きくなることがわかる.

ここで 定理 1, 条件 4. で与えた区分的二次関数を考える. この例題では, $n=1$ であることから, V を単純な二次形式 $V(x)=x^{\mathrm{T}}Qx$ とすることができる. したがって, 各モード $p=1,2$ に対する Riccati 不等式

$$p=1:\quad -2Q+1+\gamma^{-2}Q^2\leq 0$$
$$p=2:\quad -2Q+100+\gamma^{-2}\frac{1}{100}Q^2\leq 0$$

に対する共通解の存在が, 切り換えシステムの $\mathcal{L}_2$ ゲインを保守性なく特徴づける. これより, 切り換えシステムの $\mathcal{L}_2$ ゲイン $\gamma=5.05$ (対応する共通解は, $Q=50.5$) がえられる. このことから, Fig. 1 に示す応答は, 真の値にほぼ等しい $\mathcal{L}_2$ ゲインを与えていることがわかる.

[4] $\theta\in(0,1)$ および $x\neq 0$ とする. $\theta^2V(x)=V(\theta x)=V(\theta x+(1-\theta)0)<\theta V(x)+(1-\theta)V(0)=\theta V(x)$ より $\theta(1-\theta)V(x)>0$ となる. $\theta\in(0,1)$ であるから, $V(x)>0$ がえられる

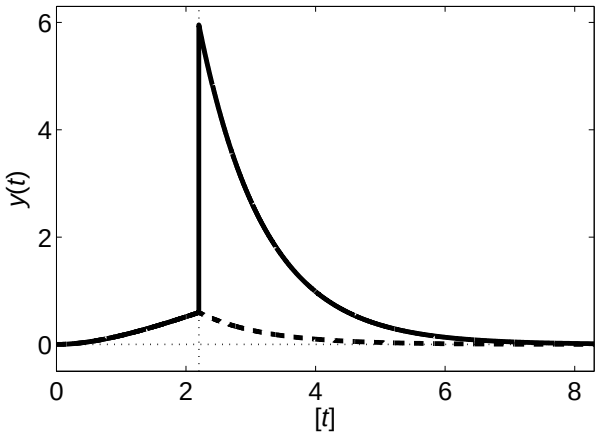

Fig. 1: A simulation comparison of responses for the switched system and the two LTI systems being switched.

4. おわりに

本稿では, 切り換えシステムの $\mathcal{L}_2$ ゲインを考え, これを保守性なく特徴づける完全な解を与えた. また, 有界な $\mathcal{L}_2$ ゲインをもつ条件から, 切り換えシステムの安定性が帰着される条件を考え, 切り換え信号の正則性に関する条件が要求されること, あるいは厳密に凸な蓄積関数の存在が必要であることを明らかにした.

参考文献

[1] D. Liberzon and A. S. Morse, "Basic problems in stability and design of switched systems," *IEEE Control Syst. Mag.*, vol. 19, no. 5, p. 59/70, 1999.

[2] R. Shorten *et al.*, "Stability criteria for switched and hybrid systems," *SIAM Review*, vol. 49, no. 4, p. 545/592, 2007.

[3] A. P. Molchanov and E. S. Pyatnitskiy, "Criteria of asymptotic stability of differential and difference inclusions encountered in control theory," *Systems & Control Letters*, vol. 13, no. 1, p. 59/64, 1989.

[4] W. P. Dayawansa and C. F. Martin, "A converse Lyapunov theorem for a class of dynamical systems which undergo switching," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 44, no. 4, p. 751/760, 1999.

[5] J. P. Hespanha, "Root-mean-square gains of switched linear systems," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 48, no. 11, p. 2040/2045, 2003.

[6] M. Margaliot and J. P. Hespanha, "Root-mean-square gains of switched linear systems: A variational approach," *Automatica*, vol. 44, no. 9, p. 2398/2402, 2008.

[7] K. Hirata and J. P. Hespanha, "$\mathcal{L}_2$-induce gains of switched systems," 2010, Technical Report. [Online]. Available: http://csl.nagaokaut.ac.jp/~hirata/guest/accs10/

[8] J. P. Hespanha, "Uniform stability of switched linear systems: Extensions of LaSalle's invariance principle," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 49, no. 4, p. 470/482, 2004.